.Khnisse A.S :2011/2012

Devoir de synthèse N°2

Durée: 3.h

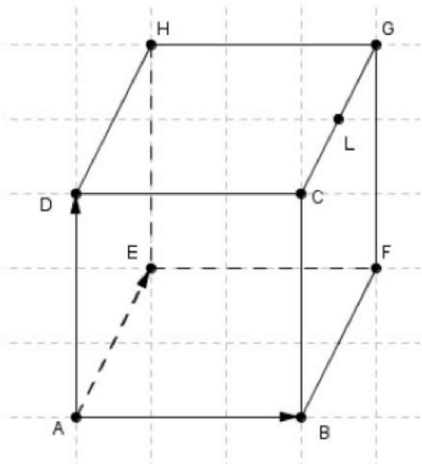
Exercice N°1: (3 pts) (25 mn)

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse proposée est exacte.

L'exercice consiste à choisir la réponse exacte sans justification.

I/ Le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ formé sur le cube ABCDEFGH est orthonormé direct.

On désigne par L le milieu du segment [CG]



1/ Le vecteur $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AD}$ est égale à :

a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{BA}$ c) $\overrightarrow{AH}$

2/ Une équation de plan (BCF) est :

a) $x-1=0$ b) $y=1$ b) $x+y+z-1=0$

3/ L'aire du triangle ABL est égale à :

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

II/

1/ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^3}$ est égale à

a) 1 b) $+\infty$ c) $-\infty$

2/ La fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est définie sur

a) $]0,+\infty[$ b) $]0,1[$ c) $]1,+\infty[$

3/ Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \ln(\frac{e.n+1}{n+1})$ on alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

Exercice N°2 : (3pts) (25 mn)

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = e^2\sqrt{U_n} \end{cases}$

1/ Calculer U_1 et U_2

2/ Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \ln(U_n) - 4$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

b) Exprimer V_n en fonction de n. En déduire U_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de U_n

Exercice N°3 : (5 pts) (45 mn)

I- Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$

1/ Justifier les résultats du tableau de variation de g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2/ Déduire le signe de g(x)

b) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$

On désigne par (ζ_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1/a) Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

c) Dresser le tableau de variation de f

2/a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à ζ_f

d) Etudier les positions relatives de ζ_f et Δ

3/ Construire ζ_f et Δ

4/Soit h la restriction de f sur $]0,1]$

a) Montrer que h réalise une bijection de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$

b) Construire $\zeta_{h^{-1}}$ la courbe de la fonction réciproque de h dans le même repère que ζ_f

5/ Déterminer la primitive F de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1.

Exercice N°4 : (4 pts) (40 mn)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x)\, e^x$

On désigne par (ζ_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

(unité graphique 2 cm)

1/a) Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f .

2/ Calculer f(1). En déduire la position relative de (ζ_f) à son asymptote horizontale

3/a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat graphiquement.

b) Tracer (ζ_f).

4/ Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax + b)e^x$, où a et b sont deux réels

Déterminer a et b pour que F soit une primitive $\mathbb{R}$ de la fonction f

Exercice N°4 : (5 pts) (45 mn)

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points

$A(-1,-1,1)$, $B(3,2,-1)$ et $C(1,\frac{1}{2},1)$

1 / Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P défini par les points A, B et C est : $3x - 4y - 1 = 0$

2/ Soit m un réel. On considère l'ensemble S_m des points M(x,y,z) de ξ tels que :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(m+1)y + m^2 + 2m = 0$

Montrer que pour tout réel m S_m est une sphère de rayon $R_m = \sqrt{m^2 + 5}$ et

de centre $I_m(m, m+1, 0)$

3/ Déterminer m pour que S_m passe par O

4/a) Calculer $d = d(I_m, P)$

b) Montrer que l'intersection de S_5 et P est un cercle dont on précisera le centre et le rayon

c) Déterminer des équations cartésiennes des plans P_1 et P_2 , parallèles à P et tangents à S